

平成18年度
東京大学大学院総合文化研究科
広域科学専攻修士課程入学試験問題

相関基礎科学系 基礎科目

(平成17年8月30日 11:15~12:45)

試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。開始の合図があるまで、下記の注意事項をよく読んでください。

1. 本冊子は、相関基礎科学系を第一志望とする受験者のためのものである。
2. 本冊子の本文は14ページである。落丁、乱丁又は印刷不鮮明の箇所があった場合には、手を挙げて申し出ること。
3. 第1問~第13問から3問を選択して解答すること。
4. 配付された3枚の解答用紙(両面使用可)は、問題ごとに1枚を使用すること。
5. 解答用紙の上の欄に、解答した問題の番号、科目名、氏名及び受験番号を、次の記入例のように記入すること。なお、氏名、受験番号を記入していない答案は無効である。

記入例

問題番号	科目名	氏名	受験番号
第5問	物理学(3)	○ ○ ○ ○	No.○○○○

6. 本冊子の最後の3枚は草稿用紙である。切り離して使用してもよい。
7. 試験の開始後は、中途退場を認めない。
8. 本冊子、解答用紙及び草稿用紙は持ち帰ってはならない。
9. 次の欄に受験番号と氏名を記入せよ。

受験番号	
氏名	

相關基礎科学系 基礎科目

目 次

第1問	数学(1)	1
第2問	数学(2)	2
第3問	物理学(1)	3
第4問	物理学(2)	4
第5問	物理学(3)	5
第6問	化学(1)	6
第7問	化学(2)	7
第8問	化学(3)	8~9
第9問	生物学(1)	10
第10問	生物学(2)	11
第11問	地学(1)	12
第12問	地学(2)	13
第13問	科学史・科学哲学	14

平成18年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第1問 数学(1)

α を正の実数として、次式で定義される積分 $F(\alpha)$

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx$$

について考えよう。ただし $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である。

1. 被積分関数 $f_{\alpha}(x) = \exp\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)$ の概形を図示せよ。
2. 被積分関数の指数部分 $g_{\alpha}(x) = -x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}$ が最大になるところで、 $g_{\alpha}(x)$ を冪級数に展開する。このとき、二次までの展開式を求めよ。
3. α が十分大きいとき、被積分関数の指数部分を問2の二次関数で置き換え、積分 $F(\alpha)$ の近似値を求めよ。
4. $F(\alpha)$ の α に関する微分方程式を求めよ。すなわち、 $\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)$ を $F(\alpha)$ を用いて表わせ。その際、積分変数の変数変換を利用するとよい。
5. 問4で得られた微分方程式を解くことによって、積分 $F(\alpha)$ を求めよ。

平成18年度修士課程入学試験問題
 相関基礎科学系 基礎科目

第2問 数学(2)

行列 $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ で $x \neq 0$ とする。対角成分が 1 の下三角行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}$ と上三角行列 $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ で $M = AB$ となるもの(ガウス分解)は一意的に定まる。ガウス分解を用いて M の固有値を求めよう。

1. A, B を x, y, z, u を用いて表わせ。
2. $f(M) = BA$ により、写像 $M \mapsto f(M)$ を定義する。行列 $f(M)$ を x, y, z, u を用いて表わせ。
3. 行列 $M_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & u_n \end{pmatrix}$ を以下の初期条件と漸化式により定める。

$$M_0 = M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$
$$M_{n+1} = f(M_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ただし $x_n \neq 0$ と仮定する。 $y_n, x_n + u_n, x_n u_n - y_n z_n$ は n に依存しないことを示せ。

4. $t = x + u, d = xu - yz$ とする。 x_{n+1} を x_n, t, d を用いて表わせ。
5. M の固有値を λ_1, λ_2 とする。 $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ のとき、 x_n を $x_0, \lambda_1, \lambda_2$ を用いて表わせ。その際、 $\lambda_i = t - \frac{d}{\lambda_i}$ を用いて $\frac{x_n - \lambda_1}{x_n - \lambda_2}$ の満たす漸化式を求めるとよい。
6. $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ かつ $y \neq 0$ の場合、 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ を求めよ。

平成18年度修士課程入学試験問題
 関連基礎科学系 基礎科目

第3問 物理学(1)

円筒座標を用いたとき、次式 ($a > 0$) で与えられる曲面上を、1個の粒子 (質量 m) が運動している。粒子は、曲面の凹凸にかかわらず、常に曲面に拘束されたまま完全になめらかに運動できるようになっている。

$$z = \begin{cases} a\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right], & r < R \\ 0, & r \geq R \end{cases}$$

z は鉛直方向 (z -軸方向) の高さ、 r は z -軸からの距離である。なお、円筒座標 (r, θ, z) は、デカルト座標 (x, y, z) と $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$ の関係にある。

最初、粒子は x -軸正方向の無限遠方から、 x -軸と平行で距離 b にある直線軌道

$$y = b, \quad R > b > 0$$

に沿って一定の速度 (大きさ v) で曲面の凸部分に進入して来た。拘束力以外で粒子にかかる力は、重力 (重力加速度 g) だけであるとして、以下の設問に答えよ。結果だけではなく、推論や式変形の概要を記すこと。

- (1) この運動において、粒子の全エネルギーおよび z -軸回りの角運動量 l は保存する。その理由を述べ、 l を初期条件により決めよ。また、角速度 $\frac{d\theta}{dt}$ を r と l により表せ。
- (2) 粒子が最初に凸部分の縁に到着したときの角度座標を θ_0 とする。また、その後、粒子が凸部分から離れるまでに、 z -軸回りを反時計方向に回転した角度を θ_1 とする。粒子が凸部分から離れて再び水平直線運動に移ったとき、この外向き直線軌道が x -軸となす角度 ψ を、 θ_0 と θ_1 を用いて表せ。ただし、 ψ は x -軸の負の方向から時計方向に測るとする。また、この関係式を含めた粒子軌道の全体的特長を、作図によって説明せよ。図は鉛直上方から見て描くこと。
- (3) 粒子が凸部分に進入して $r < R$ が満たされているとき、 $\frac{dr}{dt}$ を r の関数として表せ。
- (4) この運動における r の最小値を r_M と置く。 r_M を初期条件から求めよ。また、 θ_1 を初期パラメタの関数として定めるために必要かつ十分な式を与えよ。

平成18年度修士課程入学試験問題
 相関基礎科学系 基礎科目

第4問 物理学(2)

x 軸に平行な直線上に、単位長さ当り λ の線密度で電荷が分布している。このとき、以下の設問に答えよ。ただし、真空の誘電率および透磁率をそれぞれ ϵ_0 、 μ_0 とせよ。

- (1) 直線電荷から距離 r の位置における電場の大きさと方向、および電位を求めよ。
- (2) この直線電荷を x 軸方向に一定の速度 v で移動させると、直線電流とみなせる。その電流の大きさ I を求めよ。
- (3) 前問(2)の状態、直線電荷から距離 r の位置における磁束密度の大きさと方向を求めよ。
- (4) 次に、接地された平面状の導体を考え、(1)と同じ直線電荷を、表面から距離 a の位置に導体平面と平行に置いた。直交座標を、導体表面が平面 $y = 0$ (導体内部が $y < 0$)、電荷が直線 $\{y = a, z = 0\}$ (直線は x 軸方向にのびている) となるようにとる。このとき、 $y > 0$ なる領域内の位置 (x, y, z) における電位を求めよ。なお、求めるにあたって用いた方法の根拠も述べること。
- (5) 前問(4)の状態、電場を求めよ。
- (6) この直線電荷の単位長さ当りに働く力の大きさと向きを求めよ。
- (7) 導体表面に誘導された電荷の分布を求めよ。また、求めるにあたって用いた方法の根拠も述べること。

平成18年度修士課程入学試験問題
 相関基礎科学系 基礎科目

第5問 物理学 (3)

気体の状態変化を、体積 V と温度 T の関数として考えよう。一般に、気体の内部エネルギー U に対して以下の関係式が成り立つ。ただし p を圧力とする。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \quad \text{①}$$

(1) 関係式①を、以下 i)、ii)、iii) の手順に従って導け。

- i) 準静的過程における内部エネルギー変化 dU を、エントロピー変化 dS と体積変化 dV を用いて表せ。
- ii) 次に、 dU を温度変化 dT と体積変化 dV で表したい。そのためにまず、エントロピー S に対して独立変数として T と V を採用し、その際の偏微分係数 $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$ と $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$ を、 T 、 p 、 $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ 、 $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ 等により書き下せ。
- iii) $\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$ に注意して関係式①を導け。

(2) 理想気体の内部エネルギーが、体積 V によらず温度 T のみで決まることを示せ。

(3) 現実の気体をより良く近似するために、ファン・デル・ワールスの状態方程式

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2}$$

に従う気体を考えよう。ただし R を気体定数、 n をモル数、 a 、 b を正の定数とする。

- i) 準静的等温過程で膨張させる時、内部エネルギーは増大するか減少するか答えよ。それは、ファン・デル・ワールス気体のどんな性質によるものか。
- ii) 準静的等温過程で体積 V_i から $V_f (> V_i)$ まで膨張させるのに必要な仕事と外から加えるべき熱量、およびこの気体の内部エネルギー変化をそれぞれ求めよ。

平成18年度修士課程入学試験問題
 相関基礎科学系 基礎科目

第6問 化学(1)

以下の問題1, 2に答えよ.

解答には次の物理定数を用いよ. プランク定数: $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s, 光速: $c = 3.00 \times 10^8$ m s⁻¹, ボーア半径: 5.29×10^{-11} m, エネルギーの換算: $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19}$ J.

1. 水素型原子のエネルギー準位は

$$E_n = -13.6 \times \frac{Z^2}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

であらわされる. ただし, Z は核電荷 (原子番号), n は主量子数であり, エネルギーの単位は電子ボルト (eV) を用いた. 次の問に答えよ.

- 1) 水素原子のイオン化エネルギーは何 eV か.
- 2) 水素原子の線スペクトルのうち紫外領域に現れる系列はライマン系列と呼ばれる. ライマン系列はどのような主量子数間の遷移によるものか答えよ.
- 3) ライマン系列のうち最も波長の長い線スペクトルの波長を求めよ.
- 4) He⁺ イオンから更に1個電子を奪うのに必要なエネルギーは何 eV か.
- 5) 1s 状態の波動関数は

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \quad (2)$$

である. ただし, r は原子核と電子の間の距離, a_0 はボーア半径である. 水素原子の 1s 状態における r の期待値 $\langle r \rangle$ を求めよ. 次の積分公式を用いてよい.

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-cx} dx = \frac{m!}{c^{m+1}} \quad (c > 0, m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

2. 下表に原子の有効核電荷を示す.

	He	Li	...	F	Ne
1s	1.69	2.69	...	8.65	9.64
2s	-	1.28	...	5.13	5.76
2p	-	-	...	5.10	5.76

次の問に答えよ. 計算問題の解答は有効数字2桁で答えよ.

- 1) He 原子の 1s オービタルの有効核電荷が1と2の間の値をとることを遮蔽効果の観点から説明せよ.
- 2) Li 原子のイオン化エネルギーは何 eV か, 有効核電荷の値から推定せよ.
- 3) Li⁺ イオンから更に1個電子を奪うのに必要なエネルギーは何 eV か, 有効核電荷の値から推定せよ.
- 4) 周期表で同一周期内の原子のイオン化エネルギーを比較すると, アルカリ金属原子で最小, 希ガス原子で最大となる. これを遮蔽効果の観点から説明せよ.

平成18年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第7問 化学(2)

周期表第3周期の元素に関する以下の問1から問8のすべてに答えよ。

族番号	1	2	13	14	15	16	17	18
元素	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar

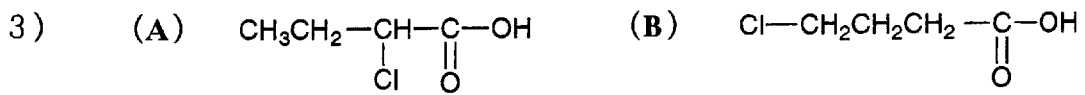
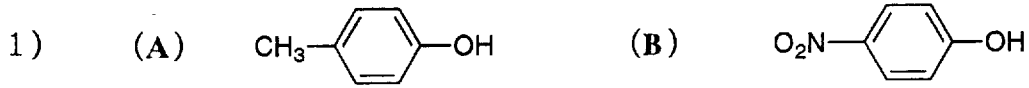
1. Arを除く7つの元素について、電気陰性度の小さい方から大きい方へ順に元素記号で記せ。
2. Arを除く7つの元素について、金属元素には金属半径を、非金属元素には単結合の共有結合半径を考え、それら半径の小さい方から大きい方へ順に元素記号で記せ。
3. NaからArへかけて原子番号が増加するに従い、第一イオン化エネルギー(I_p)は増加するが、ところどころで逆転が見られる。すなわち、原子番号が隣り合うふたつの元素で、原子番号の大きい元素の I_p が、原子番号の小さい元素の I_p よりも小さくなる箇所がある。そのような箇所の元素の組み合わせを元素記号で記せ。
4. PとClとで形成される分子として PCl_3 と PCl_5 が知られている。それぞれのルイス構造をかき、立体構造を図示せよ。
5. 14, 15, 16族の元素のつくるオキシ酸 H_4SiO_4 , H_3PO_4 , H_2SO_4 について、酸(第一解離段階)として強いものから弱い方へ順に記せ。また、そう判断した理由も記せ。
6. 8つのすべての元素の単体の結晶において、融点が一番高いのはどれか。根拠とともに記せ。
7. NaCl と MgO は同形の結晶構造をとるが、融点が 800°C と 2800°C 、沸点が 1413°C と 3600°C と両者で大きく異なっている。この理由を説明せよ。
8. Arはどのような結晶構造をとるか。根拠とともに記せ。

平成18年度修士課程入学試験問題
 相関基礎科学系 基礎科目

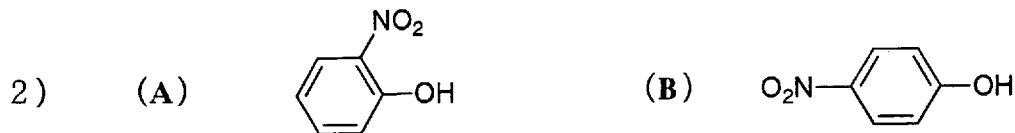
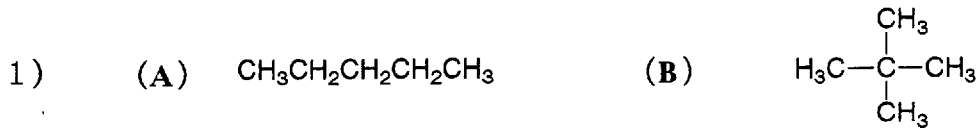
第8問 化学(3) その1

以下の問1～4のすべてに解答せよ。

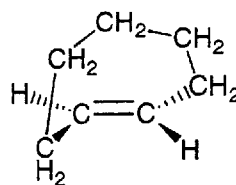
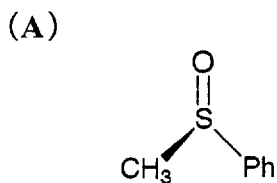
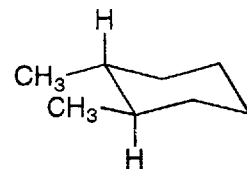
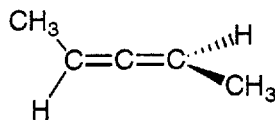
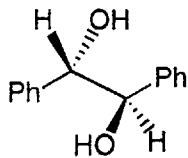
1. 次の各組の2つの化合物(A), (B)のうち, より強い酸であるのはどちらか. そう判断した理由も述べよ.



2. 次の各組の2つの化合物(A), (B)のうち, 沸点が高いものはどちらか. そう判断した理由も述べよ.



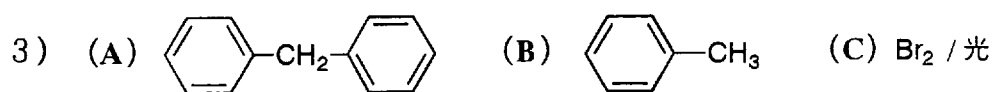
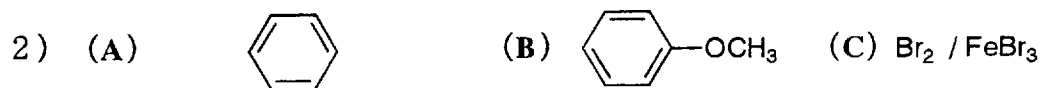
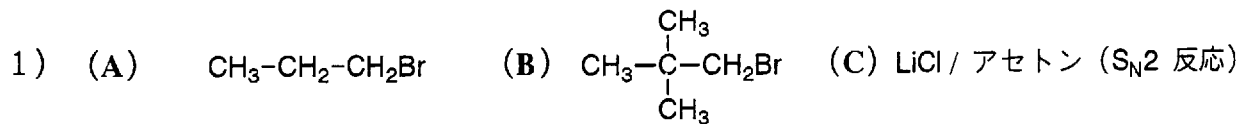
3. 次に示した化合物の構造(A)～(E)のうち, キラルなものはどれか.



平成18年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第8問 化学(3) その2

4. 次の各組の2つの化合物(A), (B)のうち, 反応試剤(C)に対する反応が速いものはどちらか. そう判断した理由も述べよ.



平成18年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第9問 生物学(1)

DNA ポリメラーゼと RNA ポリメラーゼに関する以下の問 1-5 に答えよ。

- 問 1 Watson と Crick が提案した DNA の二重らせん構造は、DNA 複製のメカニズムを説明することが可能なものであった。DNA 複製のメカニズムとはどのようなものか説明せよ。またそれは DNA の構造のどのような性質に由来するものか述べよ。
- 問 2 複製に働く DNA ポリメラーゼは、DNA を合成する機能のほかに、複製のエラーを抑えるための機能も持っている。DNA ポリメラーゼが DNA 合成のエラーを抑えているしくみについて述べよ。
- 問 3 転写においては RNA ポリメラーゼが DNA 二重らせんのうち 1 本のみを鋳型として見分けている。そのしくみについて説明せよ。
- 問 4 真核細胞では 3 種の RNA ポリメラーゼがそれぞれ別種の RNA を合成する。真核細胞に存在する RNA の種類を 4 つあげ、それらの役割をそれぞれ 2 行程度で説明せよ。
- 問 5 RNA 合成におけるエラー頻度は約 10^4 塩基あたり 1 個で、DNA 合成より約 10^5 倍も高い。RNA 合成のエラー頻度が高くても生命活動を維持していくことができるのはどのような理由によると考えられるか。転写、翻訳、タンパク質の機能、細胞の機能の 4 つの段階に分けて議論せよ。

平成18年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第10問 生物学 (2)

次の文を読んで、以下の問 1-7 に答えよ。

多細胞動物のからだを構築する細胞は、カルシウムイオンとマグネシウムイオンの除去、あるいはトリプシンなどのタンパク質分解酵素処理により解離することが出来る。解離した細胞集団を浮遊培養すると、細胞のタイプ特異的な親和性を示しながら細胞塊を形成する。

1983年、ある研究グループはマウス F9 細胞をラットに免疫し、F9 細胞のカルシウムイオン依存的な細胞接着を阻害するモノクローン抗体 ECCD-1 を作製した。彼らは、(ア) この抗体を用いて SDS-ポリアクリルアミドゲル電気泳動により細胞接着分子 (A) の分子量 X を求めた。 (イ) 一方、この抗体を用いて cDNA を単離し、その塩基配列から分子量 Y を求めたところ、 (ウ) 得られた分子量 X は Y より大きいことが分かった。 同時期、別の研究グループはカルシウムイオンに非依存的な細胞接着分子 (B) の存在を示した。現在では、これら (A) と (B) , さらに細胞外基質分子である (C) や (D) 等とそれらの受容体 (E) を介した細胞接着機構により多細胞動物のからだ構築されると考えられている。

問 1 (A) から (E) にあてはまる語を記せ。

問 2 代表的な抗体分子の模式図を描き、抗体の構造と機能を説明せよ。

問 3 接着分子に対する抗体としてポリクローン抗体ではなくモノクローン抗体を作製した理由を 2 行程度で述べよ。

問 4 下線部 (ア) について、分子量 X を求める方法を 2 行程度で述べよ。

問 5 下線部 (イ) について、分子量 Y を求める方法を 2 行程度で述べよ。

問 6 下線部 (ウ) について、分子量の差をもたらした原因は何か。その証明方法とともに 2 行程度で述べよ。

問 7 細胞接着機構が働いていると考えられる生物現象を 2 つ挙げよ。

平成18年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第11問 地学（1）

生物の大量絶滅事件について以下の問に答えよ。

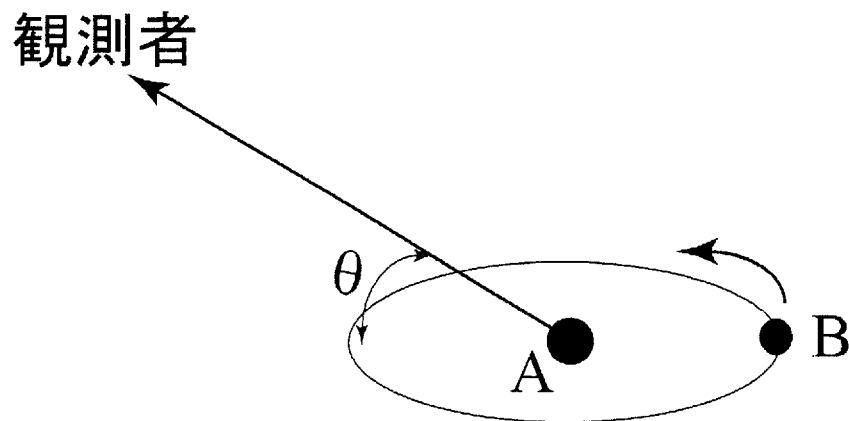
1. 大量絶滅の定義を示し、またその具体的な認定基準について図を用いて説明せよ（200字程度）。
2. 地球内に根本的原因をもつとされる大量絶滅事件について、具体例を挙げて説明せよ（図を用いて300字程度）。
3. 生命進化における大量絶滅の意義を説明せよ（200字程度）。

平成18年度修士課程入学試験問題
 関連基礎科学系 基礎科目

第12問 地学 (2)

2つの星 A と B からなる連星が観測された。A の質量 M が B の質量 m に比べて十分に大きいので、A が原点に静止し、B がその周りをケプラー運動しているように見える。また B から発せられた光を観測するうちに、この連星は円軌道を描いていることも確認された。下の問に答えよ。なお以下では、万有引力定数を G 、光速度を c とし、また $M \gg m$ として、 m/M のオーダーの項は全て無視せよ。なお観測者から連星までの距離は、連星の軌道半径に比べて十分に大きいとする。

1. B の軌道速度と軌道周期をそれぞれ V 、 P とする。そのとき、A の質量と B の軌道半径 R が求まるが、その表式を V 、 P 、 G を用いて記せ。
2. B の軌道速度 V は、そこから発せられる光の輝線の波長のドップラー効果を測定することにより制限が課される。今、静止系で観測したときの波長が λ である特定の輝線に着目することにする。下図に示されるように軌道面が我々観測者の視線方向と θ の角度にある場合、観測される輝線の波長の最大値 λ_{\max} と最小値 λ_{\min} の比を θ 、 V 、 c を用いて表せ。
3. 上で調べたように、 λ_{\max} 、 λ_{\min} 、 θ が測定されれば、 V が求まる。しかし一般的には、 θ は測定できない。よって、星 A の質量は決定できない。しかし、その質量には制限が付けられる。どのような制限か、式で示せ。



平成18年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第13問 科学史・科学哲学

科学的探求において、実験機器、観察（観測）機器、測定機器などの機器はどのような役割をもっているといえるだろうか。この点に関して、哲学的あるいは歴史的に論じなさい。