

平成19年度
東京大学大学院総合文化研究科
広域科学専攻修士課程入学試験問題

相関基礎科学系 基礎科目

(平成18年8月29日 13:00~14:30)

試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。開始の合図があるまで、下記の注意事項をよく読んでください。

1. 本冊子は、相関基礎科学系を第一志望とする受験者のためのものである。
2. 本冊子の本文は14ページである。落丁、乱丁又は印刷不鮮明の箇所があった場合には、手を挙げて申し出ること。
3. 第1問~第13問から3問を選択して解答すること。
4. 配付された3枚の解答用紙(両面使用可)は、問題ごとに1枚を使用すること。
5. 解答用紙の上の欄に、解答した問題の番号、科目名、氏名及び受験番号を、次の記入例のように記入すること。なお、氏名、受験番号を記入していない答案は無効である。

記入例

問題番号	科目名	氏名	受験番号
第5問	物理学(3)	○ ○ ○ ○	No.○○○○

6. 本冊子の最後の3枚は草稿用紙である。切り離して使用してもよい。
7. 試験の開始後は、中途退場を認めない。
8. 本冊子、解答用紙及び草稿用紙は持ち帰ってはならない。
9. 次の欄に受験番号と氏名を記入せよ。

受験番号	
氏名	

相関基礎科学系 基礎科目

目 次

第1問	数学(1)	1
第2問	数学(2)	2
第3問	物理学(1)	3
第4問	物理学(2)	4
第5問	物理学(3)	5
第6問	化学(1)	6
第7問	化学(2)	7
第8問	化学(3)	8~9
第9問	生物学(1)	10
第10問	生物学(2)	11
第11問	地学(1)	12
第12問	地学(2)	13
第13問	科学史・科学哲学	14

平成19年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第1問 数学(1)

行列 X の複素共役の転置を X^\dagger と書き, X のエルミート共役と言う. $X^\dagger = X$ であるような正方行列をエルミート行列と呼ぶ. A, B を, d 行 d 列 (d は有限) のエルミート行列とする. 行列 C を,

$$AB - BA = iC \quad (\text{i})$$

にて定義する. i は虚数単位である. 以下の問に答えよ.

- (1) C がエルミート行列であることを示せ.
- (2) d 次元列ベクトル v が, A, B の同時固有ベクトル (A の固有ベクトルであり, かつ, B の固有ベクトル) であるとき, Cv を求めよ.
- (3) C がゼロ行列 (全ての要素が0の行列) でない限りは, A, B が d 個の互いに線形独立な同時固有ベクトルを持つことはあり得ないことを示せ.
- (4) 単位行列を E と記す. t を0でない実数とすると, $C = tE$ ということはあることを証明せよ. (ヒント: (i) 式の trace (跡) をとるとよい.)
- (5) 任意の d 次元列ベクトル y について, $y^\dagger y \geq 0$ であることを示せ.
- (6) 任意の d 次元列ベクトル x について, 次の不等式を証明せよ.

$$x^\dagger A^2 x x^\dagger B^2 x \geq (x^\dagger C x)^2 / 4. \quad (\text{ii})$$

ただし, $A^2 \equiv AA, B^2 \equiv BB$ である. (ヒント: 任意の実数 λ について, $y = (A + i\lambda B)x$ とおいて, 前問の結果を利用するとよい.)

第2問 数学(2)

I. 関数 $y(x)$ が、微分方程式

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)y(x) = e^x \quad (*)$$

をみたしている。ここで、定数 λ は実数とする。関数 $y(x)$ について以下の問いに答えよ。

- (1) $\lambda \neq 1$ の場合に、微分方程式 (*) の一般解を求めよ。
- (2) $\lambda = 1$ の場合に、微分方程式 (*) の一般解を求めよ。
- (3) $f(x) = x/y(x)$ とおく。 $f(0) = 1$ をみたす解に対して $f'(0)$ を求めよ。但し、 $f'(x) = df/dx$ である。
- (4) $f(0) = 1$ をみたす解を $\lambda \neq 1$ の場合に求めよ。

II. 次の関数

$$F(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) この関数は上記 I の $f(x)$ の例になっている。 λ の値がいくらのときの解になっているか。
- (2) $x \geq 0$ の領域で

$$F(x) < \frac{6}{(x+1)^2}$$

をみたすことを示せ。

- (3) 前問の結果を用いて積分

$$I = \int_0^{\infty} dx F(x)$$

が有限の値をもつことを示せ。

平成19年度 修士課程入学試験問題
 相関基礎科学系 基礎科目

第3問 物理学 (1)

水平な氷の面上に質量 M 、長さ L の一様な棒が置いてある。水平面上に座標 x - y をとり、 x 軸を棒の長さ方向とし、原点を棒の中心に一致させる。 $-y$ 方向から質量 m の質点が速さ v_0 で滑ってきて棒に弾性衝突した。棒の太さは無視でき、氷と棒の間に摩擦は無いとする。また衝突は瞬間的に起こるとして以下の質問に答えよ。

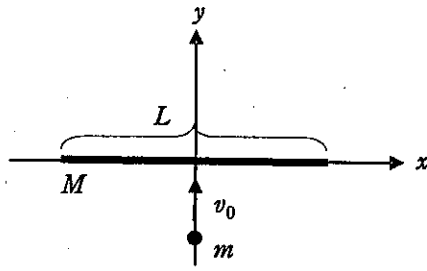


図1

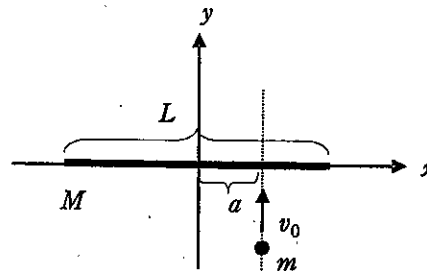


図2

図1のように、質点が棒の中心に衝突した時、衝突後に棒は回転せずに動きだした。また、衝突後の質点の速度は x 成分を持たなかった。

- (1) 衝突の際に成り立つ保存則を全て書き下せ。ただし、衝突後の棒の速度を $\vec{V} = (V_x, V_y)$ 、質点の速度を $\vec{v} = (0, v_y)$ とする。
- (2) $M = 4m$ として、衝突後の棒と質点の速度をそれぞれ求めよ。また、衝突後棒が $L/2$ 移動した時点での棒と質点の運動の様子を図示せよ。

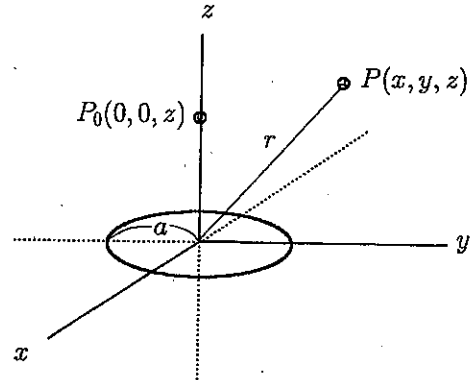
次に、図2のように質点が棒の中心から距離 a 離れた場所に衝突したところ、棒はその中心が動くとともに、反時計まわりに角速度 ω で回転をはじめた。

- (3) 棒の慣性モーメント I を M と L の関数として求めよ。
- (4) 衝突後の質点の速度を $\vec{v} = (v_x, v_y)$ 、棒の中心が移動する速度を $\vec{V} = (V_x, V_y)$ として、衝突の際に成り立つ保存則を全て書き下せ。ただし必要がある場合は棒の慣性モーメント I の記号を用いて良い。
- (5) 上記小問(2)と同様 $M = 4m$ の場合を考え、図2の a を $L/4$ とする。衝突後の質点の速度の x 成分はやはりゼロ ($v_x = 0$) であった。このとき、衝突後の質点の y 方向成分 v_y 、棒の中心の移動速度 $\vec{V} = (V_x, V_y)$ 、および回転の角速度 ω を v_0 と L で表せ。
- (6) 上記(5)の衝突後、棒の中心が $L/2$ 移動した時点での棒と質点の運動の様子を図示せよ。

平成19年度 修士課程入学試験問題
 相関基礎科学系 基礎科目

第4問 物理学 (2)

x - y 平面上に、原点を中心とする半径 a の一様に帯電した円環がある。円環は絶縁体でできており、その太さは無視できるものとする。また全電荷を Q とする。



- (1) z 軸上の点 $P_0(0, 0, z)$ における電位 ϕ を求めよ。
- (2) 原点から点 $P(x, y, z)$ までの距離を r と書く。 $r \gg a$ の場合に点 $P(x, y, z)$ における電位を $1/r^2$ までの精度で求めよ。

この円環を、上 ($z > 0$) から見たとき反時計回りに、一様な角速度 ω で回転させた。

- (3) これによって生ずる円環電流の強さ I を求めよ。
- (4) z 軸上の点 $P_0(0, 0, z)$ における磁束密度 \vec{B} の方向と大きさを求めよ。

次に、回転を止めた後、外部から x 方向にのみ変化する z 軸方向の磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B(x))$ をかけ、中心が x 軸上正方向に一定の速さ v で進むように、円環を x - y 平面上で動かした。

- (5) 円環の中心が原点を通過する瞬間に、ローレンツ力によって円環内に生ずる起電力 \mathcal{E} (単位電荷を一周させるのに要する仕事量) を $B(x)$ を含む積分の形で表せ。
- (6) このときの、円環を貫く磁束の時間変化率を表す式を導出し、前問と併せて電磁誘導の法則が成り立つことを具体的に示せ。

平成19年度 修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第5問 物理学 (3)

I. 光子気体の状態方程式は、圧力 p 、体積 V 、内部エネルギー U を用いて

$$pV = \frac{1}{3}U$$

で与えられる。また、内部エネルギー U は絶対温度 T 、体積 V の関数として次のかたちで与えられているものとする：

$$U(T, V) = cT^\nu V.$$

ここで c 及び ν は定数である。

- (1) 準静的な等温過程、断熱過程における圧力 p と体積 V の関係をそれぞれ求めよ。
- (2) 光子気体を用いたカルノーサイクルの p - V 図を描け。ただし、低温側を温度 T_1 、高温側を温度 T_2 とし、温度 T_2 での等温過程において体積は V_a から V_b まで膨張するものとする。
- (3) 前問のカルノーサイクルにおいて、光子気体が低温側で吸収する熱量を Q_1 、高温側で吸収する熱量を Q_2 とするとき、 $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$ の値を T_1 、 T_2 、 V_a 、 V_b 、 c 及び ν を用いて表せ。
- (4) $\nu = 4$ であるべきことを示せ。
- (5) 体積 V_1 、温度 T_1 の光子気体が断熱的に自由膨張し、体積 V_2 の空間を占めた。この過程が不可逆過程であることを説明せよ。

II. ある気体の二つの断熱曲線 (p - V 図上で断熱過程における圧力と体積の関係をあらわす曲線) が交わるとすると、熱力学第二法則に矛盾することを説明せよ。

平成19年度修士課程入学試験問題
 相関基礎科学系 基礎科目

第6問 化学(1)

次の問 I, II に答えよ。

I. ヘリウム原子の中の電子構造について考える。ただし、水素様原子のエネルギーは、電子の質量 m 、電荷 $-e$ 、真空の誘電率 ϵ_0 、プランク定数 h 、核電荷 Ze 、主量子数 n を用いて、

$$E_n = -\frac{Z^2 me^4}{n^2 8\epsilon_0^2 h^2}$$

で与えられる。また水素原子の 1s 状態のエネルギーは -13.6 eV である。一

方、ヘリウム原子の全電子エネルギー E_T は -77.8 eV、1s 原子軌道のエネルギーは -25.0 eV である。また、原子軌道のエネルギーは、電子の運動エネルギー T 、原子核からのクーロン引力エネルギー V_C 、他の電子からの平均的なクーロン反発エネルギー V_{12} の和で表される。

- (1) ヘリウム原子の全電子エネルギーを、 T 、 V_C 、 V_{12} を用いて表せ。
- (2) ヘリウム原子は2個の電子を持つが、1s 原子軌道のエネルギーを2倍しても、全電子エネルギーにはならない。その差 $-25.0 \times 2 - (-77.8) = 27.8$ (eV) はどのような物理量か。
- (3) ヘリウム原子の第一イオン化エネルギーを推定せよ。
- (4) ヘリウム原子の第二イオン化エネルギーは、水素原子の電子エネルギーを基にして厳密に求めることができる。その値を求めよ。
- (5) ヘリウム原子の第二イオン化エネルギーは、問(3)で求めたヘリウム原子の第一イオン化エネルギーと全電子エネルギーからも推定できる。使った計算式を説明し、その値を求めよ。

II. 化学結合における原子核の質量の役割を理解するために、水素分子 (H_2) とその二つの重水素置換体 (HD , D_2) の電子基底状態における分子振動を考える。ボルン・オッペンハイマー近似におけるこれらの分子のポテンシャルエネルギー曲線をもとに、それらの極小値の近傍を二次曲線で近似する。対応する調和振動子の力の定数を、それぞれ、 k_{HH} 、 k_{HD} 、 k_{DD} とし、その角振動数を ω_{HH} 、 ω_{HD} 、 ω_{DD} とする。一般に調和振動子の角振動数 ω は、力の定

数を k 、換算質量を μ として、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ で表される。また、H と D の質量をそれぞれ、 1.0 u

および 2.0 u とせよ。

- (1) $\frac{\omega_{HD}}{\omega_{HH}}$ と $\frac{\omega_{DD}}{\omega_{HH}}$ の値を求めよ。計算の過程も示せ。
- (2) 実験で観測される、 H_2 、 HD 、 D_2 の結合解離エネルギー(それぞれ、 $D_0(HH)$ 、 $D_0(HD)$ 、 $D_0(DD)$ とする) の大小関係を、振動エネルギーに関連して述べよ。

平成19年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第7問 化学(2)

化学において、行った実験の手順や観察結果を論理立てて簡潔に記述することは重要である。次の実験について、以下の問に答えよ。

実験: 3種類(鉄, 銅, 亜鉛)の金属片がある。外観から各金属片がどの金属であるか判定可能だが、化学反応によりそれを確かめることにした。以下に示した試薬群のうち適当なものを用いて、(1)金属片をそれぞれ溶解し、さらにその溶液について、(2)各金属イオンを確認する反応を2種類行った。

試薬群: 希塩酸, 希硝酸, 水酸化ナトリウム水溶液, アンモニア水, 硫化水素

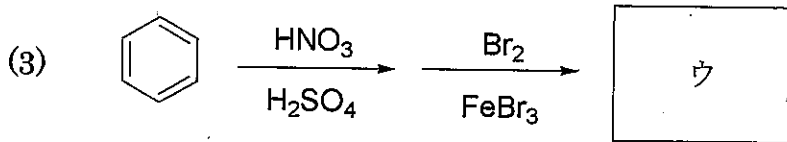
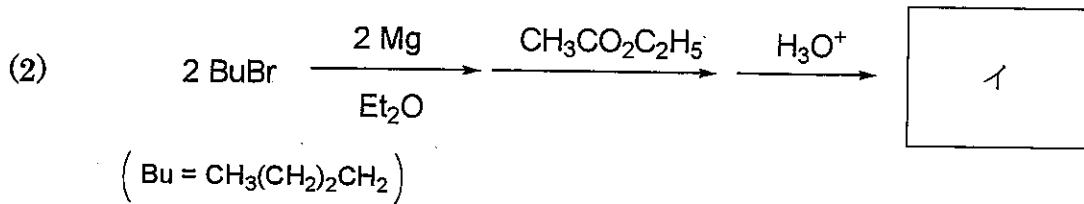
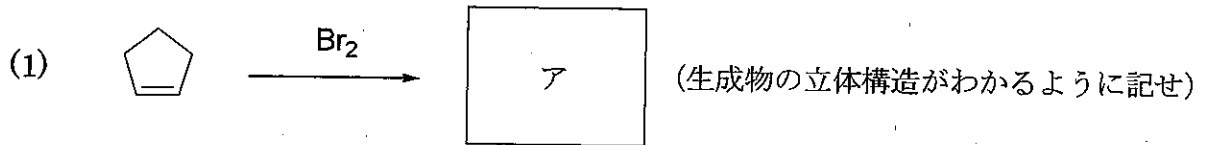
下線部(1), (2)について、どのような実験を行ったか、金属ごとに実験手順と観察される結果を答えなさい。また、その際に起こる反応の反応式を、それぞれについて書きなさい。ただし、実験で使用できる試薬は試薬群に示したもののみである。使用する実験器具については書かなくてよい。

平成19年度修士課程入学試験問題
 相関基礎科学系 基礎科目

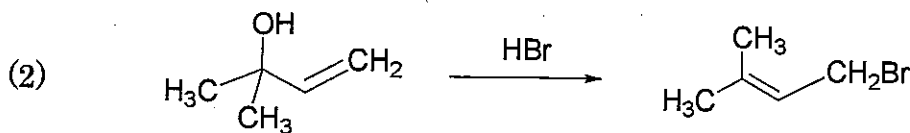
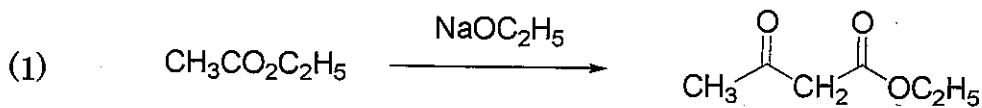
第8問 化学(3) その1

以下の問題 I ~ III のすべてに解答せよ。

I. 次の反応で得られる主な生成物ア~ウの構造式を記せ。

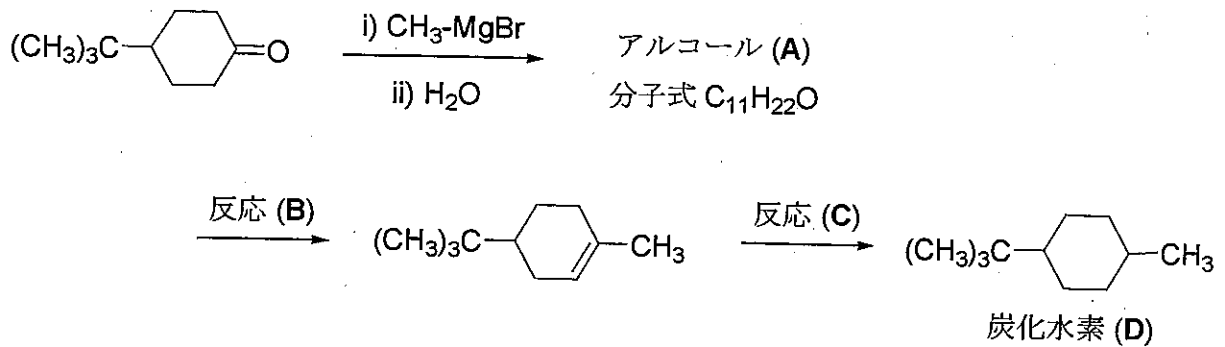


II. 次の反応の機構を説明せよ。



第8問 化学(3) その2

Ⅲ. 以下の反応に関する問に答えよ.



- (1) アルコール (A) には、立体異性体がいくつあるか。但し、配座異性体は考えなくてよい。
- (2) 反応 (B) を進行させるために必要な試剤を書け。
- (3) 反応 (C) を進行させるために必要な試剤を書け。
- (4) 炭化水素 (D) はシス体、トランス体の混合物として得られる。シス体について、最も安定な異性体の構造式を、その立体的な構造がわかるように記せ。そう判断した理由も述べよ。

平成19年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第9問 生物学(1)

以下の文を読み、各問に答えよ。

[文]

陸上植物の葉緑体は一次共生起源である。現生生物のなかで、一次共生起源の葉緑体の祖先生物に、系統上もっとも近縁と考えられている生物はシアノバクテリアである。葉緑体はおよそ 3000 種類のタンパク質で構成されていると見積もられている。(ア) そのタンパク質のほとんどは核ゲノムにコードされている。珪藻や褐藻に見られる (イ) 二次共生起源の葉緑体は、葉緑体をもつ真核生物が、葉緑体をもたない真核生物の細胞内に共生し、その細胞内共生体の葉緑体が残存・維持されてきたものと考えられている。二次共生起源の葉緑体も一次共生起源の葉緑体と同様、その構成タンパク質のほとんどは核ゲノムにコードされている。

問1 シアノバクテリアと一次共生起源の葉緑体の、構造と機能における共通点と相違点をそれぞれ列挙せよ。

問2 下線部(ア)について。

核ゲノムにコードされた葉緑体タンパク質の大部分は、移行シグナルと呼ばれるアミノ酸配列をN末端にもった前駆体タンパク質としてサイトゾルで合成され、その後、葉緑体に輸送される。移行シグナルが、タンパク質を葉緑体に選別輸送するのに必要かつ十分な機能をもっていることを示すには、どのような実験をおこなえばよいか。実験の概要を述べよ。

問3 下線部(イ)について。

二次共生起源の葉緑体について、「ある藻類の葉緑体そのものが、他の真核生物の細胞内に取り込まれ、その生物の葉緑体になった」という考えは誤りとされている。その理由を述べよ。

平成19年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第10問 生物学 (2)

神経細胞 (ニューロン) に関連した以下の問 1 ~ 4 に答えよ。

- 問 1 神経細胞の研究にヤリイカの巨大神経繊維が用いられ、神経細胞に関する多くの基本的性質が明らかにされてきた。ヤリイカの巨大神経繊維が実験材料として適している理由を述べよ。
- 問 2 神経細胞内外のイオン組成の特徴を Na^+ 、 K^+ 、 Ca^{2+} 、 Cl^- それぞれについて記せ。
- 問 3 静止状態にある神経細胞は細胞膜を介してその細胞に特有の静止電位 (一般に $-40 \sim -100 \text{ mV}$) を示す。静止電位がこのような値をとる理由を説明せよ。また、静止状態にある神経細胞の細胞膜を介した Na^+ と K^+ それぞれのイオンの流れを説明せよ。
- 問 4 活動電位発生の仕組みをイオンチャネルの開閉と関連づけて説明せよ。

平成19年度修士課程入学試験問題
 相関基礎科学系 基礎科目

第11問 地学 (1)

球対称な形状を持つ静的な星では、圧力勾配による力と自己重力が各半径においてつりあっている。 r を動径座標とすれば、つりあいの式は

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \quad (A)$$

と表される。ここで $\rho(r)$, $P(r)$, $M(r)$ は密度、圧力、及び r 以内に含まれる質量で、全て r の関数である。また G は万有引力定数を表す。以下では星の中心は $r = 0$, 表面は $r = R$ であるとする。表面よりも外では、密度と圧力はゼロである。以下の問に答えよ。

- (1) 式 (A) が示すように、球対称の空間では、半径 r での重力は r 以内に含まれる質量のみに依存し、それよりも外に存在する物質の質量には依らない。理由を説明せよ。
- (2) W と Π を以下のように定義する。

$$W = \int_0^R \frac{GM(r)\rho(r)}{r} dV \quad \Pi = \int_0^R P(r) dV.$$

ただし dV は体積要素を表す。また、 W は重力ポテンシャルエネルギーである。式 (A) を用いて

$$W = 3\Pi$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 仮に $\rho(r)$ が

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0(1 - r^2/R^2) & r \leq R, \\ 0 & r \geq R, \end{cases}$$

で与えられる時、 $M(r)$ を r の関数で表せ。さらに、式 (A) を解いて $P(r)$ を r の関数として表せ。なお ρ_0 は中心密度を表す。

- (4) 内部エネルギー密度を ε とした場合、全内部エネルギーは

$$U = \int_0^R \varepsilon dV$$

で与えられる。また星の全エネルギー E は、 $E = U - W$ で定義される。星が単原子理想気体からなる場合の U と Π の関係を示せ。またその場合に E を U で表せ。

- (5) P と ε が輻射圧、輻射エネルギーによって決まる場合の U と Π の関係、及び E と U の関係を求めよ。
- (6) 問 (4) で考えた単原子理想気体からなる星、及び問 (5) で考えた輻射によって圧力と内部エネルギーが支配される星にそれぞれ微小運動エネルギー T を与え、外向きにわずかに膨張させる。ただし T は U に比べて十分に小さいとする。この場合、それぞれの星の考えられる運命を数行で論ぜよ。

平成19年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第12問 地学 (2)

複数の遠隔地にある地層を比較し、それらを互いに同時代のものであると同定することを対比という。これについて以下の問に答えよ。

(1) 具体的に対比を行う場合、最もよく用いられるのが化石の証拠に基づく方法である。化石を用いた対比を行う際の実際の手順について図を用いて説明せよ (300字程度)。

(2) 地層そのものの特質 (岩相) に注目して対比を試みる方法もあるが、しばしば困難が生じる。最も一般的におきると考えられる困難について具体的に説明した上で、このような対比方法が可能となる条件を述べよ (300字程度)。

(3) 上述の化石および岩相に基づく方法以外の対比手段について、知る限り列挙して解説せよ (300字程度)。

平成19年度修士課程入学試験問題
相関基礎科学系 基礎科目

第13問 科学史・科学哲学

帰納 (induction) について科学史的あるいは科学哲学的に論じなさい。